

Aliasing について

図 B1 は周波数 600Hz(周期 1.66ms)のアナログ正弦波信号を、1kHz(1ms 間隔)でデジタルに変換した場合を示しています。図の実線は 600Hz の正弦波ですが、○はサンプリング点です。これらの点を通る正弦波に当てはめると、何と 600Hz の正弦波が 400Hz の正弦波に変身しているのではないですか。エイリアシング(Aliasing)の名称はこの「変身」に由来するのでしょうか。このように Aliasing はアナログ信号をデジタル変換する際の落とし穴であり、注意が必要です。

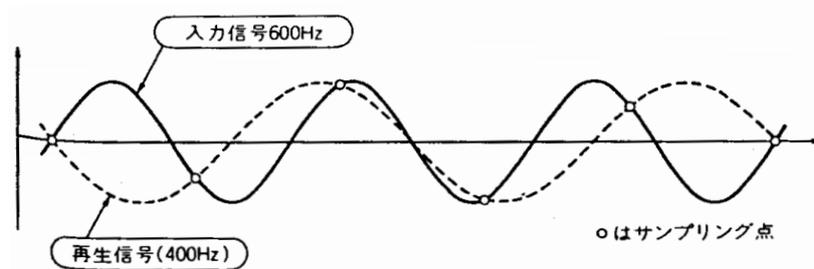


図 B1. 実線の周波数 600Hz の正弦波を 1ms 間隔 (○) で A/D 変換した例

このようななりすまし現象が発生する原因は、サンプリング定理が教えています。入力信号周波数 f_1 に対して、サンプリング周波数 f_s が $f_s \geq 2 \times f_1$ の条件を満たすと、このようななりすましが生じます。換言すると、一周期に最低 2 点以上データが存在しないと、元のアナログ信号を復元できないことを意味しています。このなりすましを避けるために、A/D 変換器の前置アンプとして LPF が不可欠な理由がここにあります。

アナログフィルタと一口に言っても、減衰曲線はまちまちです。減衰曲線が有限である限り、この特性に由来する誤差も見逃してはならない重要な留意点ですから、例題を示しながらもう少し踏み込んでみましょう。図 B2 は例題のために準備した計測器のブロックダイアグラムです。まず信号源として周波数帯域 20kHz まで保証されたアナログの白色雑音発振器を用います。白色雑音とは保証された周波数に亘って一定の振幅分布を持つ乱雑で不規則な信号です。白色とは、様々な波長をもつ強度が一定の光を重ね合わせると白色に見えることに由来しています。この乱雑信号を減衰率が 4 次で Butterworth 型 (振幅一定の周波数幅が最も広い) LPF を用います。ここでは、遮断周波数を 1kHz から 20kHz まで 8 通り変え、しかしサンプリング周波数を 10kHz に固定して A/D 変換した後、周波数分析した結果を比較することになります。

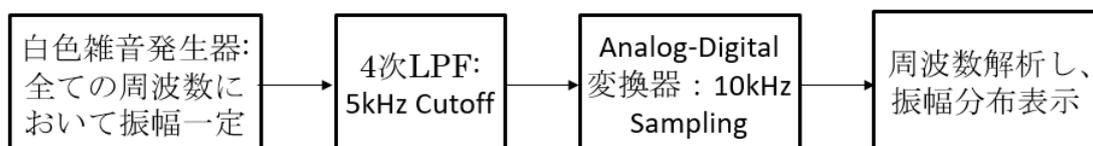


図 B2. LPF を通したアナログ白色雑音信号のデータ処理装置

周波数分析した結果を図 B3 に比較しました。1kHz から 5kHz までの 4 通りのケースについて

それぞれの低域通過成分の振幅はほぼ 0.009 で一定で、遮断周波数を越えると振幅が急激に減衰する様子が明確に示されています。例えば遮断周波数が 4kHz の場合には、振幅が $0.009/\sqrt{2}=0.0064$ に減衰する周波数と定義されていますから、4kHz における振幅はこの値と一致していることが確認できます。

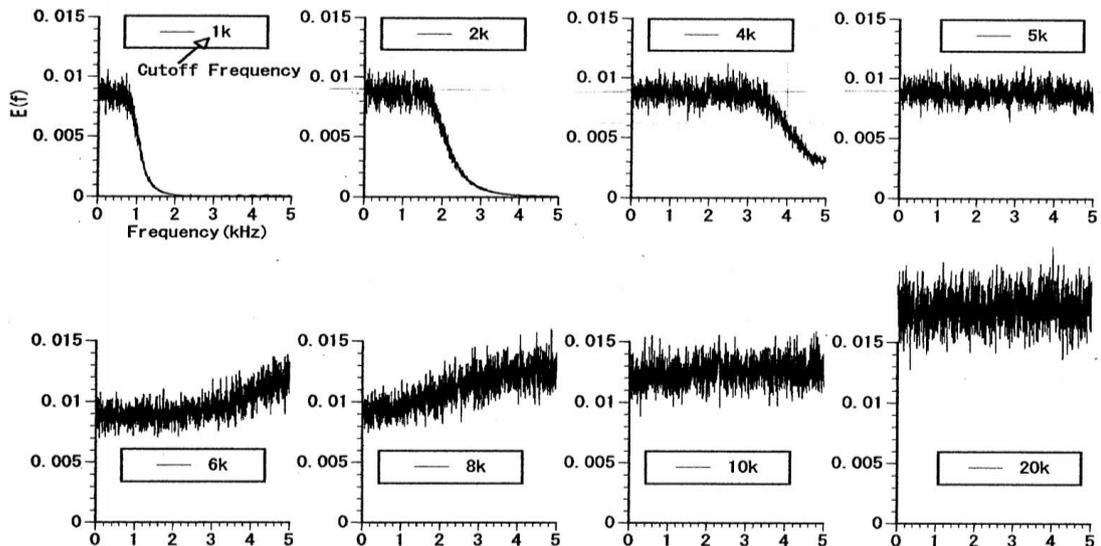


図 B3. 様々な遮断周波数をもつ LPF を通したアナログ白色雑音信号の FFT 結果の比較

一方、遮断周波数が 6kHz を越えると、エイリアシング効果が現れ始め、20kHz では各周波数成分の振幅は遮断周波数が 5kHz 以下のケースの 2 倍となっていることが解ります。このように、A/D 変換器のサンプリング周波数に対して的確な遮断周波数を持つ LPF を前置する必然性をご理解できたと思います。

ついでですから、エイリアシング効果がどの程度スペクトル分布に折り返されるか定量的に算出してみましょう。図 B4 の茶色線

は破線部を含めて 4 次の LPF の遮断周波数を 6kHz に設定した時の振幅特性を示しています。繰り返しになりますが、低周波数帯の平坦振幅 1 に対して、振幅が $1/\sqrt{2}$ に減衰した周波数は 6kHz で定義通りです。この LPF に白色雑音を入力し、通過した変動を 10kHz で A/D 変換し、そのデータを FFT 解析することを想定しています。サンプリング周波数の半分の 5kHz は Nyquist 周波数と呼ばれていますが、この周波数

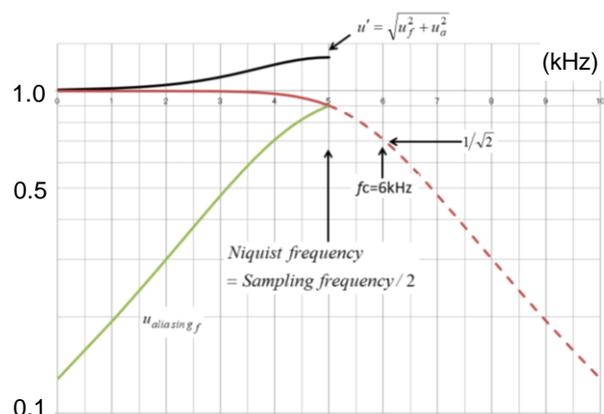


図 B4. 遮断周波数 $f_c=6\text{kHz}$ の 4th LPF 特性と 10kHz サンプリングに対する Aliasing 効果

を越えても茶色の破線で示すように LPF の減衰特性は伸びていますから明らかに Aliasing は避けられません。この折り返しは Nyquist 周波数を中心として起こるので、折り返し特性は

LPF 特性を折り返せばよいこととなります。図 B4 では緑の曲線で図示されています。従って、FFT 解析すると、茶の実線と緑の実線を合成した成分が、結果として得られることとなります。2つの成分を合成するには、各周波数成分を二乗し加算した後、振幅に直せばよい訳です。このような処理で得られたスペクトルを黒の実線(u')で示してあります。本来、0～5kHz に亘って振幅が 1 となるのが理想ですが、LPF の遮断周波数の設定を誤ると大きな計測誤差を招来することとなります。例えば、5kHz における理想振幅 1 に対して Aliasing が生じると振幅は 1.27 であり、図 B3 の結果をよく再現しており、小さい誤差とは言えないことが理解できると思います。

次に、本件の 4 次 LPF の遮断周波数を 6kHz から 5kHz に下げた場合の誤差を見積もってみましょう。LPF の減衰特性は破線で示すように Niquist 周波数を越えていることから、Aliasing 効果は避けられません。この破線部分は図 B4 と同様に Niquist 周波数に対して緑の実線のように折り返されます。従って、遮断周波数 5kHz の LPF を通過した実質成分は、茶色振幅を合成する必要があります。その結果を黒の実線で示しました。最大振幅は、3.6kHz 付近で

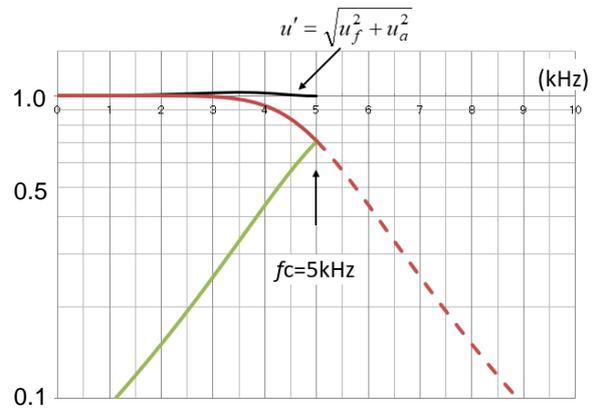


図 B5. 遮断周波数 $f_c=5\text{kHz}$ の 4th LPF 特性と 10kHz サンプルングに対する Aliasing 効果

約 1.027 です。遮断周波数を 6kHz から 5kHz に減じただけで誤差は 1/10 に低減しました。

以上の結果より、アナログ信号をデジタル変換する場合には、少なくともサンプルング周波数の半分の遮断周波数を持つ LPF を設置することで、Aliasing 効果を大幅に低減することができます。この誤差をほぼ皆無にするには、弊社の**急峻な減衰特性(-100dB/Oct)を持つ LPF-01**を設置することをお勧めします。急峻な LPF が用意できない場合には、LPF の減衰特性に応じてサンプルング周波数をやや高めに設定することで Aliasing 効果を低減することができます。

注 1)

Aliasing には 2 つの意味があります。1 つは、本稿で使っている、「別名」、「^{かた}騙る」あるいは「なりすまし」といった意味で、「麻原彰晃こと松本智津夫」のように、この「こと (事)」に対応し、通称名に続いた正式名を指すときや、これに対応した英語は Smith alias Johnson のように使います。もう 1 つの意味は、電算機関連で aliasing としてディスプレイ等で曲線を表す際解像度の制約のために滑らかでなくなることを。